16/5/17 Μάθημα 18ο

Δακτύλιος των πολυωνύμων

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση

$a_i \in R$ δακτύλιος

x σύμβολο

Πολυώνυμο είναι μια παράσταση της μορφής $f(x) = a_0 + \dots$ αλλά μόνο πεπερασμένοι όροι είναι $\neq 0$.

π.χ. $f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

Το σύνολο όλων αυτών των μορφών το συμβολίζουμε με $R[x]$ με R κάποιο δακτύλιο

Στο σύνολο ορίζουμε ισότητα:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots$

Θα λέμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall i$

Επίσης ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

$f(x) + g(x) = h(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$

με $\gamma_i = a_i + b_i \ \forall i$

$f(x) \cdot g(x) = h(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$

με $\gamma_i = \sum_{t=0}^{i} a_t b_{i-t}$

Κάνουμε την παραδοχή: $0_R x^i = 0 \quad i \in \mathbb{N}$

π.χ. R δακτύλιος των συντελεστών

Πολυωνυμικές συναρτήσεις 0_x και $1 \cdot x + 1 \cdot x^2$ στο δακτύλιο $\mathbb{Z}_2$.

Σαν πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι ίσες στον $\mathbb{Z}_2$.

Αλλά δεν είναι ίσα σαν πολυώνυμα.

Πρόταση: Το σύνολο $R[x]$ με R δακτύλιο, τις προηγούμενες πράξεις και την παραδοχή $0_{R[x]} = 0_R = x^i =$

$\cdot$ O_R είναι δακτύλιος.

Βαθμός ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ θα ισούται με n, αν $a_n \neq 0$ και $a_{n+i} = 0 \ \forall i \geq 1$

Το μηδενικό πολυώνυμο: $O_{R[x]} = O_R \cdot x^i \ \forall i$ δεν έχει βαθμό

$f(x) = 3 \cdot x^0 \Rightarrow \deg f(x) = 0$

Τα σταθερά $f(x) = a \neq 0$ έχουν βαθμό 0, γράφουμε $\deg(f) = n$

Πρόταση: 1) $\deg(f+g) \leq \max \deg(f) + \deg(g)$ όταν έχει βαθμό.

$(3x + (-3x)) = 0x$ δεν έχει βαθμό.

$(3x + 1 + (-3x) = 1)$.

2) $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$ όταν έχει βαθμό.

($\mathbb{Z}_6$: $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x^2$

$f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot x$

δεν έχει βαθμό.)

Πρόταση: Έστω R ακέραια περιοχή τότε για δύο μη μηδενικά πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ ισχύει $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

απόδειξη:

$\deg f(x) = n$ και $\deg g(x) = m$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + 0 x^{n+1} + \dots$

$g(x) = b_0 + b_0 x + \dots + b_m x^m + 0 x^{m+1} + \dots$

θέτω $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$

εξετάζουμε τον γ_{n+m+1} και υποθέτουμε $m \geq n$.

$$\gamma_{n+m+1} = \sum_{i=0}^{n+m+1} a_{n+m+1-i} \, b_i$$

$$= a_{n+m+1} b_0 + a_{n+m} b_1 + a_{n+m-1} b_2 + \dots + a_0 b_{n+m+1}$$

$a_n b_{m+1}$, $>m$

Το ίδιο ισχύει για γ_{n+m+t} με $t \geq 1$.

$$\gamma_{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \alpha_{n+m-i} b_i = a_{n+m} b_0 + a_{n+m-1} b_1 + \dots + a_n b_m + a_{n+1} b_{m+1} + \dots + a_0 b_{n+m} = a_n b_m$$

Αν ήταν O και R ακέραια περιοχή δεν θα έχει μηδενοδιαιρέτες άρα $a_n b_m \neq 0$.

Προσοχή: Αν ο R είναι μοναδιαίος τότε γράφουμε $1_R x^i = x^i \ \forall i$

Ερώτηση: Ποιες ιδιότητες κληρονομεί ο δακτύλιος $R[x]$ από τον R;;;

Πρόταση 1) Αν R αντιμεταθετικός δακτύλιος τότε είναι και ο $R[x]$.
2) Αν ο R είναι μοναδιαίος τότε είναι και ο $R[x]$.
3) Αν ο R είναι ακέραια περιοχή τότε είναι και ο $R[x]$.

απόδειξη:
3) Αν R είναι αντιμεταθετικός, μοναδιαίος από το 1) και 2) το ίδιο ισχύει και για τον $R[x]$.
Αν ο R δεν έχει μηδενοδιαιρέτες ούτε και ο $R[x]$ έχει.
(Από την απόδειξη για τον βαθμό του γινομένου)

π.χ. Το R είναι σώμα αλλά ο $R[x]$ δεν έχει αντιστροφα πάντα. $\cancel{x^{-1}}$

Προσοχή: $R \subseteq R[x]$ δεν ισχύει ως σχέση.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi: R \to R[x]$ με τύπο
$r \mapsto \phi(r) = r \cdot x^0$ το σταθερό πολυώνυμο
Το R εμφυτεύεται μέσα στον $R[x]$.

Θεώρημα: Αλγόριθμος διαίρεσης στα πολυώνυμα
Έστω R σώμα και $f(x), g(x) \in R[x]$
Τότε υπάρχουν μοναδικά $\pi(x)$ και $u(x) \in R[x]$
ώστε $f(x) = \pi(x) g(x) + u(x)$
με $\deg(u(x)) < \deg(g(x))$ ή $u(x) = 0$.
απόδειξη:
Με επαγωγή στο βαθμό του $f(x)$. Αν $\deg f(x) < \deg g(x)$
τότε $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$
Έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ και
$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$
Αν $n = m$ τότε $f(x) = a_n b_n^{-1} (x) + \,;;;$
αναλυτικά:
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$
$$\frac{a_n}{b_n} g(x) = \underbrace{\frac{a_n}{b_n} b_0 + \frac{a_n}{b_n} b_1 x + \dots + \frac{a_n}{b_n} b_{n-1} x^{n-1}} + \underbrace{a_n x^n}_{= f(x) - (a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1})}$$
$$\frac{a_n}{b_n} g(x) - \left(\frac{a_n}{b_n} b_0 + \frac{a_n}{b_n} b_1 x + \dots + \frac{a_n}{b_n} b_{n-1} x^{n-1} \right) =$$
$$= f(x) - (a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_n}{b_n} g(x) - \left(\frac{a_n}{b_n} b_0 + \frac{a_n}{b_n} b_1 x + \dots + \frac{a_n}{b_n} b_{n-1} x^{n-1} \right) + (a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}).$$

Άρα $f(x) = \frac{a_n}{b_n} g_n + u(x)$ με
$$u(x) = \left(a_0 - \frac{a_n}{b_n} b_0\right) + \left(a_1 - \frac{a_n}{b_n} b_1\right) x + \dots + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_n} b_{n-1}\right) x^{n-1}$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για βαθμούς $<n$ και $n>m$.

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} x^{n-m} g(x) + h(x) \text{ με } \deg(h(x)) < n$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγή:

$h(x) = \pi'(x) \cdot g(x) + u'(x)$ με

$\deg(u'(x)) \leq \deg(g(x))$ ή $u'(x) = 0$.

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} x^{n-m} g(x) + \pi'(x) g(x) + u'(x) =$$

$$= \left(\frac{a_n}{b_n} x^{n-m} + \pi'(x) \right) g(x) + u'(x)$$

Θέλουμε μοναδικότητα:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \pi_1(x) \cdot g(x) + u_1(x) \\ f(x) &= \pi_2(x) \cdot g(x) + u_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ώστε $\deg(u_1(x)) < \deg(g(x))$ ή $u_1(x) = 0$

$\deg(u_2(x)) < \deg(g(x))$ ή $u_2(x) = 0$

$\Rightarrow (\pi_1(x) - \pi_2(x)) g(x) = u_2(x) - u_1(x)$

Αν $u_2(x) - u_1(x) = 0 \Rightarrow \pi_1(x) - \pi_2(x) = 0$

το $R[x]$ είναι ακέραια περιοχή

Αν $u_1(x) - u_2(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(u_1(x) - u_2(x)) < \deg g(x) \leq \deg((\pi_1(x) - \pi_2(x)) g(x))$ αδύνατο

Έχω δύο πολυώνυμα ίσα με διαφορετικούς βαθμούς $\Longrightarrow$ αδύνατο.